УДК 517.954

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ BENNEY-LUKE С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Юлдашев Т.К.
Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск

Поступила в редакцию 17.06.2018, после переработки 11.09.2018.

Рассмотрены вопросы обобщенной разрешимости нелокальной прямой и обратной краевой задач с интегральными условиями по восстановлению источника и граничного режима для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Benney-Luke четвертого порядка с вырожденным ядром. Применен и развит метод вырожденного ядра для случая нелокальной обратной краевой задачи для рассматриваемого интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка. Искомые решения задачи разложены в ряды с помощью метода Фурье разделения переменных. Получена система из счетных систем алгебраических уравнений. Решение этой системы позволило получить систему из двух счетных систем нелинейных функционально-интегральных уравнений относительно первых двух неизвестных функций и формула для определения третьей неизвестной функции. Доказана однозначная разрешимость поставленной задачи. Применен метод сжимающих отображений.

Ключевые слова: обратная задача, интегро-дифференциальное уравнение Benney-Luke, вырожденное ядро, тройка неизвестных функций, однозначная разрешимость.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 3. С. 19–41.
https://doi.org/10.26456/vtpmk500

1. Постановка задачи

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, часто приводит к изучению прямых и обратных задач для уравнений математической физики. Многие задачи газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводится к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков [1, 2]. Представляют большой интерес с точки зрения приложений дифференциальные уравнения четвертого порядка (см., напр. [3–7]). Дифференциальные уравнения в частных производных типа Benney-Luke имеют приложения в математической физике (см. [7]).

В случаях решения задач математического моделирования, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме (см. приложения таких задач с нелокальными условиями в [8–12]).

Интенсивное исследование обратных задач в значительной степени обусловлено актуальностью разработки математических методов решения обширного класса важных прикладных проблем, связанных с обработкой и интерпретацией наблюдений. К обратным задачам можно отнести задачи определения некоторых физических свойств объектов, таких, как плотность, коэффициент теплопроводности, упругие модули в зависимости от координат или в виде функций других параметров. Обратная краевая задача для уравнения Буссинеска четвертого порядка с несамосопряженными краевыми и с дополнительными интегральными условиями рассмотрена в [13]. Обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений с вырожденным ядром рассматривались в [14–19].

В настоящей работе рассматривается однозначная разрешимость нелокальной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения Benney-Luke четвертого порядка с вырожденным ядром. Данная статья является дальнейшим развитием и совершенствованием методики работ [15–17]. Итак, в области Ω рассматривается уравнение вида

$$\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 U(t,x)}{\partial t^2\,\partial x^2} - \frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 U(t,x)}{\partial x^4} - \lambda \int\limits_0^T K(t,s)\,U(s,x)\,ds =$$

$$= \eta(t)\,\beta(x) + f\left(x, \beta(x), \int\limits_0^T \int\limits_0^l H(\theta,y)\,U(\theta,y)\,dy\,d\theta\right) \tag{1}$$

с интегральными условиями

$$U(0,x) + \int\limits_0^T \Theta_1(s)\,U(s,x)\,ds = \varphi_1(x),\ x \in \Omega_l, \tag{2}$$

$$U_t(0,x) + \int\limits_0^T \Theta_2(s)\,U(s,x)\,ds = \varphi_2(x),\ x \in \Omega_l, \tag{3}$$

граничными условиями Бенара

$$U(t,0) = U(t,l) = U_{xx}(t,0) = U_{xx}(t,l) = 0,\ t \in \Omega_T \tag{4}$$

и дополнительными условиями

$$\int\limits_0^T \Theta_3(t)\,U(t,x)\,dt = \psi(x),\ x \in \Omega_l, \tag{5}$$

$$U_t(t,x)_{|t=T} = w(x),\ x \in \Omega_l, \tag{6}$$

где $\eta(t) \in C(\Omega_T)$, $f(x,\beta,\gamma) \in C(\Omega_l \times R \times R)$, $\beta(x) \in C(\Omega_l)$ – первая функция восстановления, $\psi(x) \in C(\Omega_l)$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$, $\varphi_k(x) \in C(\Omega_l)$, $\varphi_k(0) = \varphi_k(l) = 0$, $k = 1,2$, $w(x) \in C(\Omega_l)$, $\Theta_j(t) \in C^2(\Omega_T)$, $j = 1,2,3$, $\int\limits_0^T\int\limits_0^l \left| H(t,x) \right| dx\,dt < \infty$, $\varphi_2(x)$ – вторая функция восстановления, $K(t,s) = \sum\limits_{i=1}^m a_i(t)\, b_i(s)$, $a_i(t)$, $b_i(s) \in C(\Omega_T)$, $\Omega \equiv \Omega_T \times \Omega_l$, $\Omega_T \equiv [0;T]$, $\Omega_l \equiv [0;l]$, $0 < T < \infty$, $0 < l < \infty$, λ – действительный спектральный параметр.

Здесь предполагается, что функции $a_i(t)$ и $b_i(s)$ являются линейно независимыми.

Решение данной задачи ищется в виде ряда Фурье:

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\, \vartheta_n(x), \tag{7}$$

где функции $\vartheta_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\,\sin \mu_n x$ образуют полную систему ортонормированных функций $\left\{\vartheta_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ в $L_2(\Omega_l)$, а $\mu_n = \frac{n\pi}{l}$ – соответствующие собственные значения.

По предположению

$$\beta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n\, \vartheta_n(x), \tag{8}$$

$$f(x,\, \beta(x),\, \gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\cdot)\, \vartheta_n(x), \tag{9}$$

где $\beta_n = \int\limits_0^l \beta(y)\, \vartheta_n(y)\, dy$,

$f_n(\cdot) = \int\limits_0^l f\left(y, \sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k\, \vartheta_k(y), \int\limits_0^T\int\limits_0^l H(s,z) \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(s)\, \vartheta_k(z)\, dz\, ds\right) \vartheta_n(y)\, dy.$

Кроме того, учтем, что

$$\vartheta_n''(x) = -\mu_n^2\, \vartheta_n(x), \quad \vartheta_n^{IV}(x) = \mu_n^4\, \vartheta_n(x). \tag{10}$$

Обозначим через $\hat{W}_2^2(\Omega)$ класс непрерывных функций $U(t,x)$ двух переменных в замкнутом прямоугольнике Ω и имеющих в нем частные производные

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial x},\ \frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2},\ \frac{\partial^3 U(t,x)}{\partial x^3},\ \frac{\partial U(t,x)}{\partial t},$$

каждая из которых принадлежат не только $L_2(\Omega)$, но и принадлежат $L_2(\Omega_l)$ при фиксированном $t \in \Omega_T$ и принадлежат $L_2(\Omega_T)$ при фиксированном $x \in \Omega_l$, где

$$L_2(\Omega) = \left\{ U(t,x) : \sqrt{\int_0^T \int_0^l \left| U(t,y) \right|^2 dy\, dt} < \infty \right\}.$$

Определение 1. *Функция* $U(t,x) \in \hat{W}_2^2(\Omega)$ *называется обобщенным решением смешанной задачи* (1) – (4), *если она удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int_0^T \int_0^l \left\{ U(t,y) \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(t,\, y) - \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial y^2} \Phi(t,\, y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi(t,\, y) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \Phi(t,\, y) \right] - F\, \Phi(t,\, y) \right\} dy\, dt =$$

$$= \int_0^l \varphi_1(y) \left[\frac{\partial}{\partial t} \Phi(0,\, y) - \frac{\partial^3}{\partial t\, \partial y^2} \Phi(0,\, y) + \right.$$

$$\left. + \int_0^T \Theta_1(s) \left(\frac{\partial}{\partial s} \Phi(0,\, y) - \frac{\partial^3}{\partial s\, \partial y^2} \Phi(0,\, y) \right) ds \right] dy -$$

$$- \int_0^l \varphi_2(y) \left[\Phi(0,\, y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi(0,\, y) + \right.$$

$$\left. + \int_0^T \Theta_2(s) \left(\frac{\partial}{\partial s} \Phi(0,\, y) - \frac{\partial^3}{\partial s\, \partial y^2} \Phi(0,\, y) \right) ds \right] dy$$

для любой функции $\Phi(t,x) \in C^{2,\,4}(\Omega)$, *подчиненной следующим условиям*

$$\Phi(t,x)\big|_{x=0} = \Phi_{xx}(t,x)\big|_{x=0} = \frac{\partial^4}{\partial x^4} \Phi(t,x)\big|_{x=0} =$$

$$= \Phi(t,x)\big|_{x=l} = U_{xx}(t,x)\big|_{x=l} = \frac{\partial^4}{\partial x^4} \Phi(t,x)\big|_{x=l} = 0,$$

$$\lim_{t \to T} \int_0^l \Phi(t,y)\, dy = \lim_{t \to T} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t,y)\, dy = 0,$$

где $F\, \Phi(t,x) =$

$$= \left[\lambda \int_0^T K(t,s)\, U(s,x)\, ds + \eta(t)\, \beta(x) + \right.$$

$$\left. + f\left(x, \beta(x), \int_0^T \int_0^l H(\theta,y)\, U(\theta,y)\, dy\, d\theta \right) \right] \Phi(t,x).$$

Определение 2. *Под решением обратной краевой задачи* (1) – (6) *понимается тройка функций* $\left\{ U(t,x) \in \hat{W}_2^2(\Omega),\ \beta(x) \in C(\Omega_l),\ \varphi_2(x) \in C(\Omega_l) \right\}$, *удовлетворяющую уравнению* (1) *и условиям* (2) – (6).

2. Сведение нелокальной задачи (1)–(4) к счетной системе нелинейных уравнений

Воспользуемся рядами (7)–(9). Тогда с помощью определения обобщенного решения из уравнения (1) с учетом формулы (10) и полноты системы ортонормированных функций $\left\{\vartheta_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ в $L_2(\Omega_l)$ получаем следующую счетную систему интегро-дифференциальных уравнений второго порядка:

$$u_n''(t)+\mu_n^2 u_n(t)=$$

$$=\frac{\lambda}{1+\mu_n^2}\int\limits_0^T\sum_{i=1}^m a_i(t)\,b_i(s)\cdot u_n(s)\,ds+\frac{\eta(t)}{1+\mu_n^2}\,\beta_n+\frac{1}{1+\mu_n^2}\,f_n(\cdot),\tag{11}$$

где $u_n(t)=\int\limits_0^l U(t,y)\,\vartheta_n(y)\,dy$.

С помощью обозначения

$$c_{in}=\int\limits_0^T b_i(s)\,u_n(s)\,ds\tag{12}$$

уравнение (11) перепишется в следующем виде

$$u_n''(t)+\mu_n^2 u_n(t)=$$

$$=\frac{\lambda}{1+\mu_n^2}\sum_{i=1}^m a_i(t)\,c_{in}+\frac{\eta(t)}{1+\mu_n^2}\,\beta_n+\frac{1}{1+\mu_n^2}\,f_n(\cdot).\tag{13}$$

Решая уравнение (13), получаем

$$u_n(t)=\alpha_{1n}\cos\mu_n t+\alpha_{2n}\sin\mu_n t+\lambda\sum_{i=1}^m p_i(t)\,c_{in}+$$

$$+\frac{1}{\nu_n}\int\limits_0^t\sin\mu_n(t-s)\left[\eta(s)\,\beta_n+f_n(\cdot)\right]ds,\tag{14}$$

где α_{1n}, α_{2n} — произвольные постоянные, которые подлежат определению, $p_i(t)=\frac{1}{\nu_n}\int\limits_0^t\sin\mu_n(t-s)\,a_i(s)\,ds$, $\nu_n=\mu_n\left(1+\mu_n^2\right)$.

Уравнение (14) запишем в виде

$$u_n(t)=\alpha_{1n}\cos\mu_n t+\alpha_{2n}\sin\mu_n t+g_n(t),\tag{15}$$

где

$$g_n(t)=\lambda\sum_{i=1}^m p_i(t)\,c_{in}+\frac{1}{\nu_n}\int\limits_0^t\sin\mu_n(t-s)\left[\eta(s)\,\beta_n+f_n(\cdot)\right]ds.\tag{16}$$

Определяем α_{1n}, α_{2n} из (15). Условия (2) и (3) запишем в следующем виде

$$u_n(0) + \int\limits_0^T \Theta_1(s)\, u_n(s)\, ds = \varphi_{1n}, \tag{17}$$

$$u'_n(0) + \int\limits_0^T \Theta_2(s)\, u_n(s)\, ds = \varphi_{2n}, \tag{18}$$

где $\varphi_{in} = \int\limits_0^l \varphi_i(y)\, \vartheta_n(y)\, dy$, $i = 1, 2$.

Тогда с учетом (15) из (17) и (18) приходим к системе алгебраических уравнений относительно α_{1n} и α_{2n}

$$\begin{cases} \alpha_{1n}\big(1 + \tau_{11n}\big) + \alpha_{2n}\tau_{21n} = \varphi_{1n} - \tau_{31n}, \\ \alpha_{1n}\tau_{12n} + \alpha_{2n}\big(\mu_n + \tau_{22n}\big) = \varphi_{2n} - \tau_{32n}, \end{cases} \tag{19}$$

где

$$\tau_{1in} = \int\limits_0^T \Theta_i(s) \cos \mu_n s\, ds, \quad \tau_{2in} = \int\limits_0^T \Theta_i(s) \sin \mu_n s\, ds,$$

$$\tau_{3in} = \int\limits_0^T \Theta_i(s) g_n(s)\, ds, \quad i = 1, 2.$$

Накладываем условие

$$\omega_n = \big(\mu_n + \tau_{22n}\big)\big(1 + \tau_{11n}\big) - \tau_{12n}\tau_{21n} \neq 0. \tag{20}$$

Тогда, решив систему (19), из (15) получаем

$$u_n(t) = \varphi_{1n} Q_{1n}(t) + \varphi_{2n} Q_{2n}(t) +$$

$$+ \int\limits_0^T \Theta_{3n}(t, s)\, g_n(s)\, ds + \frac{1}{\omega_n} g_n(t), \tag{21}$$

где

$$Q_{1n}(t) = \frac{1}{\omega_n}\Big[\big(\mu_n + \tau_{22n}\big) \cos \mu_n t - \tau_{12n} \sin \mu_n t\Big],$$

$$Q_{2n}(t) = \frac{1}{\omega_n}\Big[\tau_{21n} \cos \mu_n t + \big(1 + \tau_{11n}\big) \sin \mu_n t\Big],$$

$$Q_{3n}(t, s) = \frac{1}{\omega_n}\Big[-\big(\mu_n + \tau_{22n}\big) \cos \mu_n t + \tau_{12n} \sin \mu_n t\Big]\Theta_1(s) +$$

$$+ \frac{1}{\omega_n}\Big[\tau_{21n} \cos \mu_n t - \big(1 + \tau_{11n}\big) \sin \mu_n t\Big]\Theta_2(s).$$

Подставляя (16) в (21), получаем уравнение

$$u_n(t)=\varphi_{1n}Q_{1n}(t)+\varphi_{2n}Q_{2n}(t)+$$

$$+\int_0^T \Theta_{3n}(t,s)\left[\lambda\sum_{i=1}^m p_i(s)c_{in}+\frac{1}{\nu_n}\int_0^s \sin\mu_n(s-\theta)\big(\eta(\theta)\beta_n+f_n(\cdot)\big)d\theta\right]ds+$$

$$+\frac{1}{\omega_n}\left[\lambda\sum_{i=1}^m p_i(t)c_{in}+\frac{1}{\nu_n}\int_0^t \sin\mu_n(t-s)\big(\eta(s)\beta_n+f_n(\cdot)\big)ds\right]. \tag{22}$$

Теперь вернемся к обозначению (12). Подстановка его в (22) дает систему из счетных систем алгебраических уравнений (СССАУ)

$$c_{in}-\lambda\sum_{j=1}^m A_{ijn}\cdot c_{jn}=B_{in},\ i=\overline{1,m}, \tag{23}$$

где

$$A_{ijn}=\int_0^T b_i(s)\int_0^T \Theta_{3n}(s,\theta)\,p_{jn}(\theta)\,d\theta\,ds+\frac{1}{\omega_n}\int_0^T b_i(s)\,p_{jn}(s)\,ds,$$

$$B_{in}=\varphi_{1n}\gamma_{1n}+\varphi_{2n}\gamma_{2n}+\frac{\beta_n}{\nu_n}\gamma_{3n}+\frac{f_n(\cdot)}{\nu_n}\gamma_{4n}, \tag{24}$$

$$\gamma_{kn}=\int_0^T b_i(s)\,Q_{kn}(s)\,ds,\quad k=1,\,2,$$

$$\gamma_{3n}=\int_0^T b_i(s)\left[\int_0^T \Theta_{3n}(s,\theta)\int_0^\theta \sin\mu_n(\theta-\xi)\,\eta(\xi)\,d\xi\,d\theta+\right.$$

$$\left.+\int_0^s \sin\mu_n(s-\theta)\,\eta(\theta)\,d\theta\right]ds,$$

$$\gamma_{4n}=\int_0^T b_i(s)\left[\int_0^T \Theta_{3n}(s,\theta)\int_0^\theta \sin\mu_n(\theta-\xi)\,d\xi\,d\theta+\int_0^s \sin\mu_n(s-\theta)\,d\theta\right]ds.$$

СССАУ (23) однозначно разрешима при любых конечных B_{in}, если выполняется следующее условие

$$\Delta_n(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11n} & \lambda A_{12n} & \dots & \lambda A_{1mn}\\ \lambda A_{21n} & 1-\lambda A_{22n} & \dots & \lambda A_{2mn}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda A_{m1n} & \lambda A_{m2n} & \dots & 1-\lambda A_{mmn}\end{vmatrix}\neq 0. \tag{25}$$

Определитель $\Delta_n(\lambda)$ есть многочлен относительно λ степени не выше m. Уравнение $\Delta_n(\lambda)=0$ имеет не более m различных корней. Эти корни называются собственными (характеристическими) числами ядра интегро-дифференциального уравнения (1). При других значениях λ условие (25) выполняется. Для таких значений λ система (23) имеет единственное решение при ненулевой конечной правой части.

Решения СССАУ (23) записываются в виде

$$c_{in} = \frac{\Delta_{in}(\lambda)}{\Delta_n(\lambda)},\ i = \overline{1,m}, \tag{26}$$

где $\Delta_{in}(\lambda) =$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11n} & \dots & \lambda A_{1(i-1)n} & B_{1n} & \lambda A_{1(i+1)n} & \dots & \lambda A_{1mn} \\ \lambda A_{21n} & \dots & \lambda A_{2(i-1)n} & B_{2n} & \lambda A_{2(i+1)n} & \dots & \lambda A_{2mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{m1n} & \dots & \lambda A_{m(i-1)n} & B_{mn} & \lambda A_{m(i+1)n} & \dots & 1-\lambda A_{mmn} \end{vmatrix}.$$

Среди элементов определителей $\Delta_{in}(\lambda)$ находятся B_{in}. В свою очередь, в составе B_{in} находятся неизвестные величины $u_n(t,\mu)$, β_n и φ_{2n}. В самом деле, эти неизвестные величины находились в правой части СССАУ (23). Чтобы вывести их из знака воспользуемся выражением в (24). Согласно свойству определителя из последнего равенства имеем

$$\Delta_{in}(\lambda) = \varphi_{1n}\Delta_{1in}(\lambda) + \varphi_{2n}\Delta_{2in}(\lambda) + \frac{\beta_n(\lambda)}{\nu_n}\Delta_{3in}(\lambda) + \frac{f_n(\cdot)}{\nu_n}\Delta_{4in}(\lambda),$$

где $\Delta_{kin}(\lambda) =$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11n} & \dots & \lambda A_{1(i-1)n} & \gamma_{k1n} & \lambda A_{1(i+1)n} & \dots & \lambda A_{1m,n} \\ \lambda A_{21n} & \dots & \lambda A_{2(i-1)n} & \gamma_{k2n} & \lambda A_{2(i+1)n} & \dots & \lambda A_{2mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{m1n} & \dots & \lambda A_{m(i-1)n} & \gamma_{kmn} & \lambda A_{m(i+1)n} & \dots & 1-\lambda A_{mmn} \end{vmatrix},$$

$k = \overline{1,4}$.

Тогда формула (26) переписывается в виде

$$c_{in} = \varphi_{1n}\frac{\Delta_{1in}(\lambda)}{\Delta_n(\lambda)} + \varphi_{2n}\frac{\Delta_{2in}(\lambda)}{\Delta_n(\lambda)} +$$

$$+\frac{\beta_n(\lambda)}{\nu_n}\frac{\Delta_{3in}(\lambda)}{\Delta_n(\lambda)} + \frac{f_n(\cdot)}{\nu_n}\frac{\Delta_{4in}(\lambda)}{\Delta_n(\lambda)},\ i = \overline{1,m}. \tag{27}$$

Подставляя (27) в (22), получаем следующую счетную систему нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ)

$$u_n(t) = \Im\left(t;\, u_n\right) \equiv \varphi_{1n}G_{1n}(t) + \varphi_{2n}G_{2n}(t) + \beta_n G_{3n}(t) + G_{4n}(t)\times$$

$$\times\int\limits_0^l f\left(y, \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\vartheta_k(y), \int\limits_0^T\int\limits_0^l H(\theta,z)\sum_{k=1}^{\infty}u_k(\theta)\vartheta_k(z)\,dz\,d\theta\right)\vartheta_n(y)\,dy, \tag{28}$$

где

$$G_{kn}(t)=Q_{kn}(t)+\lambda\sum_{i=1}^{m}\frac{\Delta_{kin}(\lambda)}{\Delta_n(\lambda)}\left[\frac{p_{in}(t)}{\omega_n}+\int_0^T\Theta_{3n}(t,\,s)\,p_{in}(s)\,ds\right],\ k=1,\,2,$$

$$G_{3n}(t)=\frac{\lambda}{\nu_n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\Delta_{3in}(\lambda)}{\Delta_n(\lambda)}\left[\frac{p_{in}(t)}{\omega_n}+\int_0^T\Theta_{3n}(t,\,s)\,p_{in}(s)\,ds\right]+$$

$$+\frac{1}{\nu_n}\int_0^T\Theta_{3n}(t,\,s)\int_0^s\sin\mu_n(s-\theta)\,\eta(\theta)\,d\theta\,ds+\frac{1}{\nu_n}\int_0^t\sin\mu_n(t-s)\,\eta(s)\,ds,$$

$$G_{4n}(t)=\frac{\lambda}{\nu_n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\Delta_{4in}(\lambda)}{\Delta_n(\lambda)}\left[\frac{p_{in}(t)}{\omega_n}+\int_0^T\Theta_{3n}(t,\,s)\,p_{in}(s)\,ds\right]+$$

$$+\frac{1}{\nu_n}\int_0^T\Theta_{3n}(t,\,s)\int_0^s\sin\mu_n(s-\theta)\,d\theta\,ds+\frac{1}{\nu_n}\int_0^t\sin\mu_n(t-s)\,ds.$$

Предполагая, что функции $\beta(x)$, $\varphi_2(x)$ известны, сначала изучим прямую задачу (1)–(4).

3. Однозначная разрешимость ССНИУ (28)

Как и в случае работы [17], в пространстве $B_2(T)$ рассмотрим норму

$$\left\|u(t)\right\|_{B_2(T)}=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\left|u_n(t)\right|^2}.$$

Для произвольной функции $\vartheta(x)\in L_2(\Omega_l)$ рассматривается следующая норма

$$\left\|\vartheta(x)\right\|_{L_2(\Omega_l)}=\sqrt{\int_0^l\left|\vartheta(y)\right|^2dy}.$$

Для числовой последовательности $\left\{\varphi_n\right\}_{n=1}^{\infty}\in\ell_2$ используется норма

$$\left\|\varphi\right\|_{\ell_2}=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_n\right|^2}.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (20), (25) *и*

1. $\left\|\varphi_1\right\|_{\ell_2}\left\|G_1(t)\right\|_{B_2(T)}+\left\|\varphi_2\right\|_{\ell_2}\left\|G_2(t)\right\|_{B_2(T)}+$
$+\left\|\beta\right\|_{\ell_2}\left\|G_3(t)\right\|_{B_2(T)}\le\delta_0<\infty,\ \left\|G_4(t)\right\|_{B_2(T)}\le\delta_1<\infty;$

2. $\| f(x,\beta,\gamma) \|_{L_2(\Omega_l)} \leq M < \infty$;

3. $\left| f(x,\beta,\gamma_1) - f(x,\beta,\gamma_2) \right| \leq q(x) | \gamma_1 - \gamma_2 |$, $\| q(x) \|_{L_2(\Omega_l)} \leq \delta_2 < \infty$;

4. $\int\limits_0^T \| H(t,x) \|_{L_2(\Omega_l)} dt \leq \delta_3 < \infty$;

5. $\rho_1 = \delta_1 \delta_2 \delta_3 < 1$, *где* δ_k *и* M *— положительные постоянные,* $k = 0, 1, 2, 3$.

Тогда ССНИУ (28) *имеет единственное решение в пространстве* $B_2(T)$. *Это решение можно найти методом последовательных приближений:*

$$\begin{cases} u_n^0(t) = \varphi_{1n} G_{1n}(t) + \varphi_{2n} G_{2n}(t) + \beta_n G_{3n}(t), \\ u_n^{j+1}(t) \equiv \Im(t; u_n^j), \; j = 0, 1, 2, \ldots . \end{cases} \tag{29}$$

Доказательство. Для нулевого приближения используем неравенство Гельдера. Тогда, в силу первого условия теоремы, из (29) имеем оценку

$$\| u^0(t) \|_{B_2(T)} \leq \delta_0. \tag{30}$$

Для первой разности итерации (29), в силу неравенства Гельдера, получаем

$$\| u^1(t) - u^0(t) \|_{B_2(T)} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in \Omega_T} | G_{4n}(t) |^2} \times$$

$$\times \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l \left| f\left(y, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \vartheta_k(y), \int_0^T \int_0^l H(\theta, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k^0(\theta) \vartheta_k(z) \, dz \, d\theta \right) \vartheta_n(y) \right| dy \right]^2} .$$

Отсюда с использованием неравенства Бесселя, в силу условий теоремы и оценки (30), имеем оценку

$$\| u^1(t) - u^0(t) \|_{B_2(T)} \leq \delta_1 \| f(x, \beta, \gamma^0) \|_{L_2(\Omega_l)} \leq \delta_1 M, \tag{31}$$

$$\gamma^i = \int_0^T \int_0^l H(t,z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k^i(t) \vartheta_k(z) \, dz \, dt, \; i = 0, 1, 2, \ldots$$

Теперь для произвольной разности $u^{j+1}(t) - u^j(t)$ с применением неравенства Гельдера и Бесселя получим следующую оценку

$$\| u^{j+1}(t) - u^j(t) \|_{B_2(T)} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in \Omega_T} | G_{4n}(t) |^2} \times$$

$$\times \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l q(y) \int_0^T \int_0^l | H(t, z) | \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k^j(t) - u_k^{j-1}(t) \right| \, \left| \vartheta_k(z) \right| dz \, dt \, | \vartheta_n(y) | \, dy \right]^2} \leq$$

$$\leq \delta_1 \int_0^T \int_0^l |\, H(t,\, z)\,| \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k^j(t) - u_k^{j-1}(t) \right| \, \left| \vartheta_k(z) \right| dz\, dt \times$$

$$\times \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l q(y) \left| \vartheta_n(y) \right| dy \right]^2} \leq$$

$$\leq \delta_1 \left\| q(x) \right\|_{L_2(\Omega_l)} \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \max_{t \in \Omega_T} \left| u_k^j(t) - u_k^{j-1}(t) \right| \int_0^l |\, H(t,\, z)\,| \, \left| \vartheta_k(z) \right| dz\, dt \leq$$

$$\leq \delta_1 \, \delta_2 \int_0^T \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^l |\, H(t,\, z)\,| \, \left| \vartheta_k(z) \right| dz \right]^2} \, \left\| u^j(t) - u^{j-1}(t) \right\|_{B_2(T)} dt \leq$$

$$\leq \delta_1 \, \delta_2 \int_0^T \left\| H(t, x) \right\|_{L_2(\Omega_l)} dt \, \left\| u^j(t) - u^{j-1}(t) \right\|_{B_2(T)} dt \leq$$

$$\leq \rho_1 \left\| u^j(t) - u^{j-1}(t) \right\|_{B_2(T)}. \tag{32}$$

В силу последнего условия теоремы, из оценки (32) следует, что оператор в правой части (28) является сжимающим. Из оценок (30)–(32) заключаем, что для оператора в правой части (28) существует единственная неподвижная точка (см., напр. [20], стр. 389–401). Следовательно, в пространстве $B_2(T)$ ССНИУ (28) имеет единственное решение. Кроме того, для этого решения справедлива оценка скорости сходимости

$$\left\| u^{j+1}(t) - u(t) \right\|_{B_2(T)} \leq \frac{\rho_1^{j+1}}{1-\rho_1} \, \delta_1 \, M. \tag{33}$$

Теорема доказана. □

Покажем, что множество интегро-дифференциальных уравнений (1), для которых выполняется последнее условие теоремы 1, не пусто. Если в качестве примера берем функцию $H(t,\, x) = \exp\left\{ -\delta_1 \, \delta_2 \, t - x \right\}$, то это условие приобретает вид

$$\rho_1 = \Big(1 - \exp\left\{ -\delta_1 \, \delta_2 \, T \right\}\Big) \Big(1 - \exp\left\{ -l \right\}\Big) < 1.$$

4. Сходимость ряда Фурье для решения прямой задачи (1)–(4)

Подставляя оператор в правой части (28) в ряд Фурье (7), получаем аналитическое решение краевой задачи (1)–(4)

$$U(t,\, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x) \cdot \Big\{ \varphi_{1n} \, G_{1n}(t) + \varphi_n \, G_{2n}(t) + \beta_n \, G_{3n}(t) + G_{4n}(t) \times$$

$$\times \int\limits_0^l f\left(y, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \vartheta_k(y), \int\limits_0^T \int\limits_0^l H(\theta, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta) \vartheta_k(z)\, dz\, d\theta\right) \vartheta_n(y)\, dy \Bigg\}. \tag{34}$$

Также подставляем (29) в ряд (7)

$$U^{j+1}(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{j+1}(t)\, \vartheta_n(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x) \cdot \Big\{ \varphi_{1n} G_{1n}(t) + \varphi_n G_{2n}(t) + \beta_n G_{3n}(t) + G_{4n}(t) \times$$

$$\times \int\limits_0^l f\left(y, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \vartheta_k(y), \int\limits_0^T \int\limits_0^l H(\theta, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k^j(\theta) \vartheta_k(z)\, dz\, d\theta\right) \vartheta_n(y)\, dy \Bigg\}, \tag{35}$$

$j = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1 и* $u(t) \in B_2(T)$ *является единственным решением ССНИУ* (28). *Тогда последовательность функций* (35) *сходится абсолютно и равномерно к функции* (34) *при* $j \to \infty$.

Доказательство. Так как $u(t) \in B_2(T)$ является единственным решением ССНИУ (28), то для разности функций (35) и (34) с применением неравенства Гельдера и Бесселя аналогично оценке (32) получаем

$$\left| U^{j+1}(t,x) - U(t,x) \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |\vartheta_n(x)| \times$$

$$\times \Bigg\{ |G_{4n}(t)| \int\limits_0^l \Bigg| f\left(y, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \vartheta_k(y), \int\limits_0^T \int\limits_0^l H(\theta, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k^j(\theta) \vartheta_k(z)\, dz\, d\theta\right) -$$

$$- f\left(y, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \vartheta_k(y), \int\limits_0^T \int\limits_0^l H(\theta, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta) \vartheta_k(z)\, dz\, d\theta\right) \Bigg| \, |\vartheta_n(y)|\, dy \Bigg\} \le$$

$$\le \sqrt{\frac{2}{l}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in \Omega_T} |G_{4n}(t)|^2} \times$$

$$\times \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int\limits_0^l q(y) \int\limits_0^T \int\limits_0^l |H(t, z)| \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k^j(t) - u_k(t) \right| \, |\vartheta_k(z)| dz\, dt\, |\vartheta_n(y)|\, dy \right]^2} \le$$

$$\le \sqrt{\frac{2}{l}}\, \delta_1 \delta_2 \int\limits_0^T \| H(t,x) \|_{L_2(\Omega_l)} dt \, \| u^j(t) - u(t) \|_{B_2(T)} \, dt \le$$

$$\le \sqrt{\frac{2}{l}}\, \rho_1 \, \| u^j(t) - u(t) \|_{B_2(T)}.$$

Отсюда, в силу оценки (33), получаем

$$\left| U^{j+1}(t,x) - U(t,x) \right| \leq \sqrt{\frac{2}{l}}\, \frac{\rho_1^{j+1}}{1-\rho_1}\, \delta_1 M. \tag{36}$$

Из (36) следует, что

$$\lim_{j\to\infty} \left| U^{j+1}(t,x) - U(t,x) \right| = 0$$

Теорема доказана. □

5. Обратная задача (1)–(6)

Для определения первой функции восстановления воспользуемся условием (5). Тогда из (34) получаем:

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x) \left\{ \varphi_{1n} \int_0^T \Theta_3(t)\, G_{1n}(t)\, dt + \varphi_{2n} \int_0^T \Theta_3(t)\, G_{2n}(t)\, dt + \right.$$

$$\left. + \beta_n(\mu) \int_0^T \Theta_3(t)\, G_{3n}(t)\, dt + f_n(\cdot) \int_0^T \Theta_3(t)\, G_{4n}(t)\, dt \right\}. \tag{37}$$

Пусть

$$\int_0^T \Theta_3(t)\, G_{3n}(t)\, dt \neq 0,\ \forall\, t \in \Omega_T.$$

Тогда из (37) имеем

$$\beta_n(\mu) = h_{1n}\, \varphi_{1n} - h_{2n}\, \varphi_{2n} - h_{3n}\, f_n(\cdot), \tag{38}$$

где

$$h_{1n} = \frac{\psi_n - \int_0^T \Theta_3(t)\, G_{1n}(t)\, dt}{\int_0^T \Theta_3(t)\, G_{3n}(t)\, dt},\ h_{2n} = \frac{\int_0^T \Theta_3(t)\, G_{2n}(t)\, dt}{\int_0^T \Theta_3(t)\, G_{3n}(t)\, dt},$$

$$h_{3n} = \frac{\int_0^T \Theta_3(t)\, G_{4n}(t)\, dt}{\int_0^T \Theta_3(t)\, G_{3n}(t)\, dt},\ \psi_n = \int_0^l \psi(y)\, \vartheta_n(y)\, dy.$$

Подставляя (38) в (28), получаем

$$u_n(t) = \varphi_{1n} F_{1n}(t) + \varphi_{2n} F_{2n}(t) + F_{3n}(t)\, f_n(\cdot), \tag{39}$$

где
$$F_{1n}(t) = G_{1n}(t) + h_{1n} G_{3n}(t),$$
$$F_{2n}(t) = G_{2n}(t) - h_{2n} G_{3n}(t),$$
$$F_{3n}(t) = G_{4n}(t) - h_{3n} G_{3n}(t).$$

Теперь находим вторую функцию восстановления $\varphi_2(x)$. Подставляя (39) в ряд Фурье (7), получаем
$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x) \left\{ \varphi_{1n} F_{1n}(t) + \varphi_{2n} F_{2n}(t) + F_{3n}(t) f_n(\cdot) \right\}. \tag{40}$$

Используя условие (6), из (40) имеем
$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x) \left\{ \varphi_{1n} F'_{1n}(T) + \varphi_{2n} F'_{2n}(T) + F'_{3n}(T) f_n(\cdot) \right\}.$$

Отсюда находим формулу для определения второй функции восстановления
$$\varphi_{2n} = \varphi_{1n} \chi_{1n} - \chi_{2n} \times$$
$$\times \int_0^l f\left(y, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \vartheta_k(y), \int_0^T \int_0^l H(\theta, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta) \vartheta_k(z)\, dz\, d\theta \right) \vartheta_n(y)\, dy, \tag{41}$$
где $\chi_{1n} = \frac{w_n - F'_{1n}(T)}{F'_{2n}(T)}$, $\chi_{2n} = \frac{F'_{3n}(T)}{F'_{2n}(T)}$, $w_n = \int\limits_0^l w(y)\, \vartheta_n(y)\, dy$.

Подставляя (41) в (39), для основной неизвестной функции получаем ССНИУ
$$u_n(t) \equiv \Im_1\left(\beta_n, u_n\right) = \varphi_{1n} E_{1n}(t) + E_{2n}(t) \times$$
$$\times \int_0^l f\left(y, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \vartheta_k(y), \int_0^T \int_0^l H(\theta, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta) \vartheta_k(z)\, dz\, d\theta \right) \vartheta_n(y)\, dy, \tag{42}$$
где $E_{1n}(t) = F_{1n}(t) + \chi_{1n} F_{2n}(t)$, $E_{2n}(t) = F_{3n}(t) - \chi_{2n} F_{2n}(t)$.

Теперь, подставляя (41) в (38), для первой функции восстановления получаем счетную систему уравнений
$$\beta_n \equiv \Im_2\left(\beta_n, u_n\right) = \varphi_{1n}\, \sigma_{1n} + \sigma_{2n} \times$$
$$\times \int_0^l f\left(y, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \vartheta_k(y), \int_0^T \int_0^l H(\theta, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta) \vartheta_k(z)\, dz\, d\theta \right) \vartheta_n(y)\, dy, \tag{43}$$
где $\sigma_{1n} = h_{1n} - h_{2n} \chi_{1n}$, $\sigma_{2n} = h_{2n} \chi_{2n} - h_{3n}$.

Итак, согласно (42) и (43) имеем систему из двух счетных систем нелинейных интегральных уравнений (СССНИУ)
$$\begin{cases} u_n(t) \equiv \Im_1(\beta_n, u_n), \\ \beta_n \equiv \Im_2(\beta_n, u_n). \end{cases} \tag{44}$$

6. Однозначная разрешимость ССНИУ (44)

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (20) *и* (25). *Если*

1. $F'_{2n}(T) \neq 0$*;* $\int\limits_0^T \Theta_3(t)\, G_{3n}(t)\, dt \neq 0,\ t \in \Omega_T$*;*

2. $\max\left\{ \| \varphi_1 \|_{\ell_2} \| E_1(t) \|_{B_2(T)} ; \| \varphi_1 \|_{\ell_2} \| \sigma_1 \|_{\ell_2} \right\} \leq \varepsilon_1 = \text{const} < \infty$*;*

3. $\max\left\{ \| E_2(t) \|_{B_2(T)} ; \| \sigma_2 \|_{\ell_2} \right\} \leq \varepsilon_2 = \text{const} < \infty$*;*

4. $\| f(x,0,0) \|_{L_2(\Omega_l)} \leq M = \text{const} < \infty$*;*

5. $| f(x,\beta_1,\gamma_1) - f(x,\beta_2,\gamma_2) | \leq q(x)\Big(| \beta_1 - \beta_2 | + | \gamma_1 - \gamma_2 | \Big)$,
$\| q(x) \|_{L_2(\Omega_l)} \leq \delta_2 = \text{const} < \infty$*;*

6. $\int\limits_0^T \| H(t,x) \|_{L_2(\Omega_l)} dt \leq \delta_3 = \text{const} < \infty$*;*

7. $\rho_2 = \delta_0 \varepsilon_2 \delta_2 < 1,\ \delta_0 = \max\{\delta_3;\, 1\}$,

тогда ССНИУ (44) *имеет единственную пару решений. Эту пару решений можно найти методом последовательных приближений:*

$$\begin{cases} \beta_n^0 = 0,\ \beta_n^{j+1} = \Im_2(\beta_n^j,\, u_n^j), \\ u_n^0(t) = 0,\ u_n^{j+1}(t) = \Im_1(\beta_n^j,\, u_n^j),\ j = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{45}$$

Доказательство. Применяя неравенств Минковского, Гельдера и Бесселя для первых разностей с учетом условий теоремы из приближения (45) получаем оценки

$$\| \beta^1 - \beta^0 \|_{\ell_2} \leq \| \varphi_1 \|_{\ell_2} \| \sigma_1 \|_{\ell_2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[| \sigma_{2n} | \int_0^l | f(y,0,0) \cdot \vartheta_n(y) |\, dy \right]^2} \leq$$

$$\leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l | f(y,0,0) | \cdot | \vartheta_n(y) |\, dy \right]^2} \leq$$

$$\leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \| f(x,0,0) \|_{L_2(\Omega_l)} \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 M, \tag{46}$$

$$\| u^1(t) - u^0(t) \|_{B_2(T)} \leq$$

$$\leq \| \varphi_1 \|_{\ell_2} \| E_1(t) \|_{B_2(T)} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in \Omega_T} \left[| E_{2n}(t) | \int_0^l | f(y,0,0) \cdot \vartheta_n(y) |\, dy \right]^2} \leq$$

$$\leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l |\, f\,(y,0,0)\,| \cdot \left| \vartheta_n(y) \right| dy \right]^2} \leq$$

$$\leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \left\| f(x,0,0) \right\|_{L_2(\Omega_l)} \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 M. \tag{47}$$

Для произвольных разностей с применением неравенств Минковского, Гельдера и Бесселя получаем следующие оценки

$$\left\| \beta^{j+1} - \beta^j \right\|_{\ell_2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\, \sigma_{2n}\,|^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l q\,(y) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \beta_k^j - \beta_k^{j-1} \right| \cdot \left| \vartheta_k(y) \right| + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \int_0^T \int_0^l |\, H\,(\theta,z)\,| \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k^j(\theta) - u_k^{j-1}(\theta) \right| \cdot \left| \vartheta_k(z) \right| dz\, d\theta \right) \left| \vartheta_n(y) \right| dy \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left\| \sigma_2 \right\|_{\ell_2} \left\{ \int_0^l \left(q\,(y) \sum_{k=1}^{\infty} \left| \beta_k^j - \beta_k^{j-1} \right| \cdot \left| \vartheta_k(y) \right| \right)^2 dy \right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left\| \sigma_2 \right\|_{\ell_2} \left\{ \int_0^l \left(q\,(y) \int_0^T \int_0^l |\, H(\theta,z)\,| \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k^j(\theta) - u_k^{j-1}(\theta) \right| \cdot \left| \vartheta_k(z) \right| dz\, d\theta \right)^2 dy \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \varepsilon_2 \sum_{k=1}^{\infty} \left| \beta_k^j - \beta_k^{j-1} \right| \int_0^l q\,(y) \left| \vartheta_k(y) \right| dy +$$

$$+ \varepsilon_2 \left\| q(x) \right\|_{L_2(\Omega_l)} \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k^j(t) - u_k^{j-1}(t) \right| \int_0^l |\, H(t,y)\,| \, \left| \vartheta_k(y) \right| dy\, dt \leq$$

$$\leq \varepsilon_2 \delta_2 \left[\left\| \beta^j - \beta^{j-1} \right\|_{\ell_2} + \int_0^T \left\| H\,(t,x) \right\|_{L_2(\Omega_l)} \left\| u^j(t) - u^{j-1}(t) \right\|_{B_2(T)} dt \right] \leq$$

$$\leq \varepsilon_2 \delta_2 \left[\left\| \beta^j - \beta^{j-1} \right\|_{\ell_2} + \delta_3 \left\| u^j(t) - u^{j-1}(t) \right\|_{B_2(T)} \right]; \tag{48}$$

$$\left\| u^{j+1}(t) - u^j(t) \right\|_{B_2(T)} \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\, E_{2n}(t)\,|^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l q\,(y) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \beta_k^j - \beta_k^{j-1} \right| \cdot \left| \vartheta_k(y) \right| + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \int_0^T \int_0^l |\, H\,(\theta,z)\,| \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k^j(\theta) - u_k^{j-1}(\theta) \right| \cdot \left| \vartheta_k(z) \right| dz\, d\theta \right) \left| \vartheta_n(y) \right| dy \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left\| E_2(t) \right\|_{B_2(T)} \left\{ \left[\int_0^l \left(q(y) \sum_{k=1}^{\infty} \left| \beta_k^j - \beta_k^{j-1} \right| \cdot \left| \vartheta_k(y) \right| \right)^2 dy \right]^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \left[\int_0^l \left(q(y) \int_0^T \int_0^l \left| H(\theta, z) \right| \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k^j(\theta) - u_k^{j-1}(\theta) \right| \cdot \left| \vartheta_k(z) \right| dz\, d\theta \right)^2 dy \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \leq$$

$$\leq \varepsilon_2 \delta_2 \left[\left\| \beta^j - \beta^{j-1} \right\|_{\ell_2} + \delta_3 \left\| u^j(t) - u^{j-1}(t) \right\|_{B_2(T)} \right]. \tag{49}$$

Из (48) и (49) получаем

$$\left\| \beta^{j+1} - \beta^j \right\|_{\ell_2} + \left\| u^{j+1}(t) - u^j(t) \right\|_{B_2(T)} \leq$$

$$\leq \rho_2 \left(\left\| \beta^j - \beta^{j-1} \right\|_{\ell_2} + \left\| u^j(t) - u^{j-1}(t) \right\|_{B_2(T)} \right). \tag{50}$$

В силу последнего условия теоремы, из оценки (50) следует, что операторы в правой части (44) являются сжимающими. Из оценок (46), (47) и (50) заключаем, что для операторов (44) существует единственная пара неподвижных точек (см., напр. [20], стр. 389–401). Следовательно, СССНИУ (44) имеет единственную пару решений $\left\{u(t) \in B_2(T),\ \beta \in \ell_2\right\}$. Кроме того, справедливы оценки скорости сходимости

$$\left\| \beta^{j+1} - \beta \right\|_{\ell_2} \leq \frac{\rho_2^{j+1}}{1 - \rho_2} \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 M \right), \tag{51}$$

$$\left\| u^{j+1}(t) - u(t) \right\|_{B_2(T)} \leq \frac{\rho_2^{j+1}}{1 - \rho_2} \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 M \right). \tag{52}$$

Теорема доказана. □

7. Разрешимость обратной задачи (1)–(6)

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы* 3 *и* $\left\{u(t) \in B_2(T);\ \beta \in \ell_2\right\}$ *является единственной парой решений СССНИУ* (44). *Тогда обратная задача* (1) – (6) *однозначно разрешима.*

Доказательство. Подставляя решения СССНИУ (44): $\left\{u(t) \in B_2(T);\ \beta \in \ell_2\right\}$ и итерацию (45) в (7) и (8) соответственно, получаем

$$\beta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \vartheta_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x) \Big[\varphi_{1n} \sigma_{1n} + \sigma_{2n} \times$$

$$\times \int_0^l f\left(y, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \vartheta_k(y), \int_0^T \int_0^l H(\theta, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta) \vartheta_k(z)\, dz\, d\theta \right) \vartheta_n(y)\, dy \Big], \tag{53}$$

$$\beta^{j+1}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^{j+1}\vartheta_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\Big[\varphi_{1n}\sigma_{1n}+\sigma_{2n}\times$$

$$\times\int_0^l f\left(y,\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^j\vartheta_k(y),\int_0^T\int_0^l H(\theta,z)\sum_{k=1}^{\infty}u_k^j(\theta)\vartheta_k(z)\,dz\,d\theta\right)\vartheta_n(y)\,dy\Bigg], \tag{54}$$

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\vartheta_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\Big[\varphi_{1n}E_{1n}(t)+E_{2n}(t)\times$$

$$\times\int_0^l f\left(y,\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\vartheta_k(y),\int_0^T\int_0^l H(\theta,z)\sum_{k=1}^{\infty}u_k(\theta)\vartheta_k(z)\,dz\,d\theta\right)\vartheta_n(y)\,dy\Bigg], \tag{55}$$

$$U^{j+1}(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{j+1}(t)\vartheta_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\Big[\varphi_{1n}E_{1n}(t)+E_{2n}(t)\times$$

$$\times\int_0^l f\left(y,\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^j\vartheta_k(y),\int_0^T\int_0^l H(\theta,z)\sum_{k=1}^{\infty}u_k^j(\theta)\vartheta_k(z)\,dz\,d\theta\right)\vartheta_n(y)\,dy\Bigg]. \tag{56}$$

Покажем, что последовательность функций (54) сходится к функции (53) при $j\to\infty$. Покажем также, что последовательность функций (56) сходится к функции (55) при $j\to\infty$. Пусть $\big\{u(t)\in B_2(T);\ \beta\in\ell_2\big\}$ является единственной парой решений ССНИУ (44). Применим методику получения оценок теоремы 2. Тогда с учетом оценок (51), (52) получаем, что справедливы оценки

$$\big|\beta^{j+1}(x)-\beta(x)\big|\le\sum_{n=1}^{\infty}\big|\beta_n^{j+1}-\beta_n\big|\cdot\big|\vartheta_n(x)\big|\le$$

$$\le\sqrt{\frac{2}{l}}\rho_2\big\|\beta^j-\beta\big\|_{\ell_2}\le\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{\rho_2^{j+1}}{1-\rho_2}\big(\varepsilon_1+\varepsilon_2 M\big)<\infty, \tag{57}$$

$$\Big|U^{j+1}(t,x)-U(t,x)\Big|\le\sum_{n=1}^{\infty}\big|u_n^j(t)-u_n(t)\big|\cdot\big|\vartheta_n(x)\big|\le$$

$$\le\sqrt{\frac{2}{l}}\rho_2\big\|u^j(t)-u(t)\big\|_{B_2(t)}\le\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{\rho_2^{j+1}}{1-\rho_2}\big(\varepsilon_1+\varepsilon_2 M\big)<\infty. \tag{58}$$

Подставляя решения ССНИУ (44): $u(t)\in B_2(T)$ и $\beta\in\ell_2$ в (41), определяем вторую функцию восстановления

$$\varphi_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\Big[\varphi_{1n}\chi_{1n}-\chi_{2n}\times$$

$$\times\int_0^l f\left(y,\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\vartheta_k(y),\int_0^T\int_0^l H(\theta,z)\sum_{k=1}^{\infty}u_k(\theta)\vartheta_k(z)\,dz\,d\theta\right)\vartheta_n(y)\,dy\Bigg]. \tag{59}$$

Из (57) и (58), в частности, следует сходимость ряда (59). Теорема доказана. □

Список литературы

[1] Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 248 с.

[2] Замышляева А.А. Математические модели соболевского типа высокого порядка // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2014. Т. 7, № 2. С. 5–28. https://doi.org/10.14529/mmp140201

[3] Ахтямов А.М., Аюпова А.Р. О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне // Журнал Средневолжского математического общества. 2010. Т. 12, № 3. С. 37–42.

[4] Турбин М.В. Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершель-Балкли // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2013. № 2. С. 246–257.

[5] Шабров С.А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2015. № 2. С. 168–179.

[6] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.

[7] Benney D.J., Luke J.C. Interactions of permanent waves of finite amplitude // Journal of Mathematical Physics. 1964. Vol. 43. Pp. 309–313.

[8] Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Математическое моделирование. 2000. Т. 12, № 1. С. 94–103.

[9] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.

[10] Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приближения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 72–81.

[11] Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935.

[12] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quarterly of Applied Mathematics. 1963. Vol. 5, № 21. Pp. 155–160.

[13] Мегралиев Я.Т., Ализаде Ф.Х. Обратная краевая задача для одного уравнения Буссинеска четвертого порядка с несамосопряженными краевыми и с дополнительными интегральными условиями // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 2. С. 17–36.

[14] Юлдашев Т.К. Обратная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма четвертого порядка с вырожденным ядром // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2015. № 4. С. 736–749.

[15] Юлдашев Т.К. Обратная задача для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром и нелокальными интегральными условиями // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 3. С. 19–33.

[16] Юлдашев Т.К. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма третьего порядка с вырожденным ядром // Владикавказский математический журнал. 2016. Т. 18, № 2. С. 76–85.

[17] Юлдашев Т.К. Обратная задача для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Benney–Luke с вырожденным ядром // Известия высших учебных заведений. Математика. 2016. № 9. С. 59–67.

[18] Юлдашев Т.К. Разрешимость и определение коэффициента в одной краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром // Доклады Национальной академии наук Украины. 2017. № 5. С. 8–16.

[19] Yuldashev T.K. Determination of the coefficient and boundary regime in boundary value problem for integro-differential equation with degenerate kernel // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38, № 3. Pp. 547–553. https://doi.org/10.1134/S199508021703026X

[20] Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 495 с.

Образец цитирования

Юлдашев Т.К. Об одной нелокальной обратной задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Benney-Luke с вырожденным ядром // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. №3. С. 19–41. https://doi.org/10.26456/vtpmk500

Сведения об авторах

1. **Юлдашев Турсун Камалдинович**
доцент кафедры высшей математики Сибирского государственного университета науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева.

Россия, 660014, г. Красноярск, проспект им. газеты «Красноярский рабочий», д. 31, СибГУ им. М.Ф. Решетнева. E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

ON A NONLOCAL INVERSE PROBLEM FOR A BENNEY-LUKE TYPE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH DEGENERATE KERNEL

Yuldashev Tursun Kamaldinovich
Associate professor of Higher Mathematics Department,
Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
Russia, 660014, Krasnoyarsk, Prospekt Krasnoyarskiy rabochiy, 31, SibSU.
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

Received 17.06.2018, revised 11.09.2018.

Are considered the questions of generalized solvability of the nonlocal direct and inverse boundary value problems with integral conditions for a restore the resource and boundary regimes for a nonlinear Benney-Luke type integro-differential equation of the fourth order with degenerate kernel. The method of degenerate kernel is applied and developed for the case of considering Benney-Luke type integro-differential equation of the fourth order. The required solutions of the problem are decomposed into series by the aid of Fourier method of separation of variables. Is obtained a system of countable system of algebraic equations. Solving this system is derived a system of two countable system of nonlinear functional integral equations with respect to first and second unknowing variables and the formula for calculate the third unknowing variable. Is proved the one value solvability of the considered problem. Is used the method of compressing mapping.

Keywords: inverse problem, Benney-Luke type integro-differential equation, degenerate kernel, a triple of unknowing functions, one valued solvability.

Citation

Yuldashev T.K., "On a nonlocal inverse problem for a Benney-Luke type integro-differential equation with degenerate kernel", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2018, no. 3, 19–41. (in Russian) https://doi.org/10.26456/vtpmk500

References

[1] Algazin S.D., Kiyko I.A., *Flatter plastin i obolochek [Flutter of plates and shells]*, Nauka Publ., Moscow, 2006 (in Russian), 248 pp.

[2] Zamyshlyayeva A.A., "Sobolev type mathematical models of higher order", *Vestnik Yuzhno-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie [Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software]*, **7**:2 (2014), 5–28 (in Russian), https://doi.org/10.14529/mmp140201.

[3] Akhtyamov A.M., Aupova A.R., "On solving the problem of diagnosing defects in a small cavity in the rod", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of Middle Volga Mathematical Society]*, **12**:3 (2010), 37–42 (in Russian).

[4] Turbin M.V., "Investigation of initial-boundary value problem for the Herschel-Bulkley mathematical fluid model", *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika [Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics]*, 2013, № 2, 246–257 (in Russian).

[5] Shabrov S.A., "Estimates of the impact function of a mathematical model of the fourth-order", *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika [Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics]*, 2015, № 2, 168–179 (in Russian).

[6] Whitham G.B., *Linear and nonlinear waves*, A Willey-Interscience Publication, New-York, London, Sydney, Toronto, 1974, 636 pp.

[7] Benney D.J., Luke J.C., "Interactions of permanent waves of finite amplitude", *Journal of Mathematical Physics*, **43** (1964), 309–313.

[8] Gordeziani D.G., Avilishbili G.A., "Solving the nonlocal problems for onedimensional medium oscillation", *Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical Modelling]*, **12**:1 (2000), 94–103 (in Russian).

[9] Ionkin N.I., "Solution of a boundary-value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition", *Differentsialnye Uravneniya [Differential Equations]*, **13**:2 (1977), 294–304 (in Russian).

[10] Nakhushev A.M., "An approximate method for solving boundary value problems for differential equations and its approximation to the dynamics of soil moisture and groundwater", *Differentsialnye Uravneniya [Differential Equations]*, **18**:1 (1982), 72–81 (in Russian).

[11] Samarskii A.A., "On some problems in the theory of differential equations", *Differentsialnye Uravneniya [Differential Equations]*, **16**:11 (1980), 1925–1935 (in Russian).

[12] Cannon J.R., "The solution of the heat equation subject to the specification of energy", *Quarterly of Applied Mathematics*, **5**:21 (1963), 155–160.

[13] Mehraliev Y.T., Alhzade F.H., "An inverse problem for a fourth-order Boussinesq equation with non-conjugate boundary and integral overdetermination conditions", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 2, 17–36 (in Russian).

[14] Yuldashev T.K., "Inverse problem for nonlinear Fredholm integro-differential equation of fourth order with degenerate kernel", *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences]*, **19**:4 (2015), 736–749 (in Russian).

[15] Yuldashev T.K., “Inverse problem for an ordinary integro-differential equation with degenerate kernel and nonlocal integral conditions”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2016, № 3, 19–33 (in Russian).

[16] Yuldashev T.K., “Inverse problem a Fredholm integro-differential equation of third order with decenerate kernel”, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, **18**:2 (2016), 76–85 (in Russian).

[17] Yuldashev T.K., “Inverse problem for a nonlinear Benney–Luke type integrodifferential equations with degenerate kernel”, *Russian Mathematics*, **60**:9 (2016), 53–60.

[18] Yuldashev T.K., “Solvability and determination of coefficient in a boundary value problem for a Fredholm integro-differential equation with degenerate kernel”, *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 2017, № 5, 8–16 (in Russian).

[19] Yuldashev T.K., “Determination of the coefficient and boundary regime in boundary value problem for integro-differential equation with degenerate kernel”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **38**:3 (2017), 547–553, https://doi.org/10.1134/S199508021703026X.

[20] Trenogin V.A., *Funktsionalnyj analiz [Functional Analyses]*, Nauka Publ., Moscow, 1980 (in Russian), 495 pp.